Eksperimenti pokazuju da se u trodimenzionom fizičkom prostoru elektromagnetno polje može najposrednije okarakterisati dvema vektorskim funkcijama prostornih koordinata i vremena, koje se respektivno zovu jačina električnog polja i magnetna indukcija i obeležavaju sa $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Veličine $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ su takve karakteristike elektromagnetnog polja, pomoću kojih se može najjednostavnije izraziti sila interakcije kojom elektromagnetno polje deluje na naelektrisanu česticu koja se u njemu nalazi. Eksperimentalno je ustanovljeno da ta sila interakcije, u svim inercijalnim sistemima reference, ima oblik:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

gde je q naelektrisanje čestice, a jačina električnog polja $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ i magnetna indukcija $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ se uzimaju u onoj tački prostora $\mathbf{r}$ u kojoj se, u odabranom trenutku t, nalazi posmatrana naelektrisana čestica, pri čemu je $\mathbf{v}$ njena brzina u tom trenutku. Sve navedene vektorske veličine ($\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{r}, \mathbf{v}$) se odnose na isti inercijalni sistem reference kao i $\mathbf{F}$. Sila $\mathbf{F}$ se označava kao Lorencova (ili ponderomotorna) sila delovanja polja na česticu.

Za kontinum naelektrisanja, element zapremine dV ima naelektrisanje ρdV i može se, u duhu formalizma kontinuma, tretirati kao tačkasto naelektrisanje. Sila koja deluje na taj element iznosi

$$d\mathbf{F} = dq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho dV(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = dV(\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})$$

1. Ponderomotorne sile elektromagnetnog polja

Sile kojima elektromagnetno polje dejstvuje na naelektrisanje u tom polju nazivaju se *ponderomotorne sile*, a njihov rad vrši se na račun energije elektromagnetnog polja. Pretpostavimo da su ova naelektrisanja raspoređena *kontinuirano* u posmatranoj oblasti V, ispunjavajući je potpuno ili delimično, pa uočimo naelektrisanje dq u elementu zapremine *dV* i neka se ono kreće izvesnom brzinom $\mathbf{v}$ i može se, u duhu formalizma kontinuma, tretirati kao tačkasto naelektrisanje. Sila kojom elektromagnetno polje dejstvuje na ovo naelektrisanje $dq = \rho\, dV$ može se napisati u obliku

$$d\mathbf{F} = dq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho dV(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = dV(\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) \qquad (1)$$

Tada se integracijom po oblasti *V* dobija *ukupna sila kojom elektromagnetno polje dejstvuje na posmatrani sistem naelektrisanja*

$$\mathbf{F} = \int_V \left(\rho\, \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}\right) dV$$

ili konciznije

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV, \quad \mathbf{f} \equiv \rho\, \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \qquad (2)$$

gde je $\mathbf{f}$ odgovarajuća sila po jedinici zapremnine, tzv. *gustina ponderomotornih sila.*

Gornjim izrazom određene su ponderomotorne sile elektromagnetnog polja u opštem slučaju, ali ako nas interesuju samo ponderomotorne sile na *slobodna naelektrisanja*, pod ρ i $\mathbf{j}$ treba podrazumevati prostornu i strujnu gustinu samo ovih naelektrisanja, koje i figurišu u Maksvelovim jednačinama:

$$div\ \mathbf{D} = \rho, \qquad div\ \mathbf{B} = 0$$

$$rot\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\ rot\ \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Tada pomoću prve i četvrte od ovih jednačina možemo eliminisati ove veličine ρ i $\mathbf{j}$, čime dobijamo

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}\ div\,\mathbf{D} + \left(rot\ \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \times \mathbf{B} =$$

$$= \mathbf{E}\, div\,\mathbf{D} - \mathbf{B} \times rot\ \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{D} \times \mathbf{B}\right) + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

a ako u poslednjem članu smenimo $\partial \mathbf{B}/\partial t$ prema trećoj Maksvelovoj jednačini i radi simetrije između električnih i magnetnih veličina dodamo član $\mathbf{H}\cdot div\ \mathbf{B}$, koji je prema drugoj Maksvelovoj jednačini jednak nuli, gustini ponderomotornih sila možemo napisati u obliku

$$\mathbf{f} = \left(\mathbf{E}\cdot div\ \mathbf{D} - \mathbf{D}\times rot\ \mathbf{E}\right) + \left(\mathbf{H}\cdot div\ \mathbf{B} - \mathbf{B}\times rot\ \mathbf{H}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right) \tag{3}$$

Time je izražena <u>*gustina ponderomotornih sila*</u> *kao funkcija samo od jačina polja i vektora indukcije.* Prvi deo u zagradi karakteriše uticaj električnog polja, drugi uticaj magnetnog, a treći istovremeni uticaj i jednog i drugog, koji dolazi do izražaja samo u slučaju vremenski promenljivog elektromotornog polja. Označimo ove delove sa

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{E}\ div\ \mathbf{D} - \mathbf{D}\times rot\ \mathbf{E}, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{H}\ div\ \mathbf{B} - \mathbf{B}\times rot\ \mathbf{H}, \quad \mathbf{f}_3 = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right) \tag{4}$$

i ispitajmo posebno prirodu dejstva svake od ovih vrsta ponderomotornih sila.

Dalja analiza pokazuje da se dejstvo ovih sila koje potiče od prva dva dela ispoljava delimično ili potpuno u vidu <u>*površinskih sila na graničnu površ*</u>, a dejstvo koje potiče od trećeg dela u vidu <u>*vremenske promene impulsa elektromagnetnog polja*</u>.

Gornji izraz za gustinu ponderomotornih sila može se dalje transformisati u cilju izdvajanja jednog njegovog dela koji se može prikazati u obliku divergencije i pri integraciji prevesti u površinski integral. U tom cilju pođimo od izraza za $\mathbf{f}_1$ i prvi njegov član transformišimo pomoću divergencije dijadskog proizvoda[1]

$$\mathbf{f}_1 = \nabla\cdot\left\{\mathbf{D},\mathbf{E}\right\} - \left(\mathbf{D}\cdot\nabla\right)\mathbf{E} - \mathbf{D}\times rot\ \mathbf{E}.$$

Na sličan način može se transformisati i $\mathbf{f}_2$, zamenjujući $\mathbf{E}$ sa $\mathbf{H}$ i $\mathbf{D}$ sa $\mathbf{B}$, čime izraz (3) za $\mathbf{f}$ dobija oblik

$$\mathbf{f} = \nabla\cdot\left(\left\{\mathbf{D},\mathbf{E}\right\} + \left\{\mathbf{B},\mathbf{H}\right\}\right) - \left[\left(\mathbf{D}\cdot\nabla\right)\mathbf{E} + \mathbf{D}\times rot\ \mathbf{E} + \left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{H} + \mathbf{B}\times rot\ \mathbf{H}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right) \tag{5}$$

Integralimo sad obe strane jednačine (5) po oblasti *V*, pri čemu se prvi deo može transformisati u površinski prema Gaussovoj teoremi $\int_V \left(\nabla\cdot\mathbf{T}^*\right) dV = \oint_S \mathbf{T}\cdot d\mathbf{S}$ za tenzore:

$$\int_V \nabla\cdot\left(\left\{\mathbf{D},\mathbf{E}\right\} + \left\{\mathbf{B},\mathbf{H}\right\}\right) dV = \oint_S \left(\left\{\mathbf{E},\mathbf{D}\right\} + \left\{\mathbf{H},\mathbf{B}\right\}\right)\cdot d\mathbf{S},$$

Jer se konjugovani tenzor dobija izmenom mesta vektora u dijadskom proizvodu, a u poslednjem integralu se može izmeniti redosled operacija integracije i diferenciranja

[1] $\mathbf{B}\ div\ \mathbf{A} = \nabla\cdot\left\{\mathbf{A},\mathbf{B}\right\} - \left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}$, videti dodatak A.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}\times\mathbf{B})\,dV = \frac{d}{dt}\int_V (\mathbf{D}\times\mathbf{B})\,dV\,.$$

Na taj način dobijamo ukupnu ponderomotornu silu elektromagnetnog polja u obliku

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}dV$$

$$= \oint_S \left(\{\mathbf{E},\mathbf{D}\} + \{\mathbf{H},\mathbf{B}\}\right)\cdot d\mathbf{S} - \int_V \left[(\mathbf{D}\cdot\nabla)\mathbf{E} + \mathbf{D}\times rot\;\mathbf{E} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{H} + \mathbf{B}\times rot\;\mathbf{H}\right]dV - \frac{d}{dt}\int_V (\mathbf{D}\times\mathbf{B})dV \tag{6}$$

To je najopštiji oblik ponderomotornih sila, koji važi *bez obzira na oblik matrijalnih jednačina*. Pri tome porvi član ima oblik površinskog integrala po *S*, te se može interpretirati kao *onaj deo ponderomotornih sila koji se ispoljava u vidu površinskog dejstva na graničnu površ.* Poslednji član ima oblik vremenskog izvoda jedne integralne veličine, a pošto se i sila u mehanici definiše kao vremenski izvod impulsa, može se očekivati da ova integralna veličina ima veze sa postuliranim impulsom elektromagnetnog polja. Što se tiče drugog člana, on može da dobije konkretniji oblik tek kad znamo veze između veličina $\mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$ kao i između $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$, tj, odgovarajuće materijalne jednačine.

2. Površinsko ponderomotorno dejstvo

Pretpostavimo opet da je posmatrana sredina *homogena i bez disperzije*, tako da pri slabim i niskofrekventnim poljima važe materijalne jednačine u obliku

$$D_i = \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ik}E_k, \quad B_i = \sum_{k=1}^{3}\mu_{ik}H_k\,, \tag{7}$$

koje možemo napisati simbolički

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \hat{\mu}\cdot\mathbf{H} \tag{8}$$

i neka su koeficijenti ε_{ik} i μ_{ik} simetrični i nezavisni od koordinata, *ali mogu biti eventualne funkcije vremena.* Napomenimo da su ove pretpostavke komplementarne onima koje smo uveli pri dokazu zakona održaja energije: tamo smo pretpostavili da ovi koeficijenti mogu biti proizvoljne funkcije od koordinata, ali nezavisni od vremena. U tom slučaju se prvi deo integranda u drugom članu izraza (11) može se transformisati u

$$(\mathbf{D}\cdot\nabla)\mathbf{E} + \mathbf{D}\times rot\;\mathbf{E} = \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right). \tag{9}$$

Ovde još možemo iskoristiti identičnost $grad\;\phi = div(\phi\,\mathcal{E})$, gde je $\mathcal{E}$ jedinični tenzor (jer je $\nabla\cdot(\phi\mathcal{E}) = (\nabla\phi)\cdot\mathcal{E} = \nabla\phi$), pa se prethodni izraz može napisati u vidu divergencije

$$\left(\mathbf{D}\cdot\nabla\right)\mathbf{E}+\mathbf{D}\times rot\mathbf{E}=\nabla\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right)\mathcal{E}\right],$$

a na sličan način može se transformisati i drugi deo navedenog integranda, čime dobijamo

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{D}\cdot\nabla\right)\mathbf{E}+\mathbf{D}\times rot\ \mathbf{E}+\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{H}+\mathbf{B}\times rot\ \mathbf{H}=\\&=\nabla\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right)\mathcal{E}\right]\end{aligned}\tag{10}$$

Stoga se u ovom slučaju i ovaj integral može transformisati u površinski

$$\begin{aligned}&\int_V\left[\left(\mathbf{D}\cdot\nabla\right)\mathbf{E}+\mathbf{D}\times rot\ \mathbf{E}+\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{H}+\mathbf{B}\times rot\ \mathbf{H}\right]dV=\\&=\oint_S\left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right)\mathcal{E}\right]\cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

a opšti izraz (6) za ponderomotorne sile elektromagnetnog polja time dobija oblik

$$\mathbf{F}=\int_V\mathbf{f}\ dV=\oint_S\mathcal{N}\cdot d\mathbf{S}-\frac{d}{dt}\int_V\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right)dV,\tag{11}$$

gde smo stavili

$$\mathcal{N}=\left\{\mathbf{E},\mathbf{D}\right\}+\left\{\mathbf{H},\mathbf{B}\right\}-\frac{1}{2}\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right)\mathcal{E}\tag{12}$$

Prema tome, ako materijalne jednačine imaju oblik $D_i=\sum\varepsilon_{ik}E_k$ i $B_i=\sum\mu_{ik}H_k$ *sa simetričnim koeficijentima koji ne zavise od koordinata, onaj deo ponderomotornih sila elektromagnetnog polja koji zavisi samo od jačine električnog odnosno jačine magnetnog polja u potpunosti se ispoljava u vidu površinskih sila na graničnu površ posmatrane oblasti.*

3. Maksvelov tenzor napona

Iz izloženog se vidi da pod navedenim uslovima na svaki element granične površi neke proizvoljne oblasti, gde postoji elektromagnetno polje, dejstvuje površinska sila oblika $d\mathbf{F}=\mathcal{N}\cdot d\mathbf{S}$ i ona je potpuno određena tenzorom (12). Stoga se ovako definisan tenzor $\mathcal{N}$ naziva <u>*tenzor napona elektromagnetnog polja*</u> ili *Maksvelov tenzor napona.* Iz same njegove definicije se vidi da se on sastoji iz dva potpuno analogna dela

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1&=\left\{\mathbf{E},\mathbf{D}\right\}-\frac{1}{2}\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right)\mathcal{E}\\\mathcal{N}_2&=\left\{\mathbf{H},\mathbf{B}\right\}-\frac{1}{2}\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right)\mathcal{E}\end{aligned},\tag{13}$$

od kojih prvi zavisi samo od električnog polja, a drugi samo od magnetnog, tj. *Maksvelov tenzor napona jednak je zbiru tenzora napona električnog i magnetnog polja, koji imaju isti oblik.*

Da bismo našli komponente ovih tenzora, razložimo vektore u dijadskim proizvodima na komponente. Tako za prvi tenzor imamo

$$\mathcal{N}_1 = \left\{ \sum_i E_i \mathbf{e}_i ,\ \sum_k D_k \mathbf{e}_k \right\} - \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \mathcal{E}$$

a stavljajući još $\mathcal{E} = \sum \{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i\}$ gornji izraz možemo napisati u obliku

$$\mathcal{N}_1 = \sum_i \sum_k \left[E_i D_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \right] \{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k\} \qquad (14)$$

Koeficijenti uz osnovne dijdske proizvode $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k\}$ tada predstavljaju komponente ovog tenzora

$$T_{ik}^{(1)} = E_i D_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}),$$

a na sličan način možemo naći i komponente drugog tenzora, zamenjujući **E** sa **H** i **D** sa **B**, tako za ukupni Maksvelov tenzor napona dobijamo

$$T_{ik} = (E_i D_k + H_i B_k) - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \qquad (15)$$

Odavde vidimo da *Maksvelov tenzor napona u opštem slučaju nije simetričan, sem za homogne i izotropne sredine bez disperzije (<u>vakuumu slične sredine</u>), kad važe materijalne jednačine* $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ i $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. U ovom poslednjem slučaju imaćemo na pr. za $i = 1$ i $k = 1$.

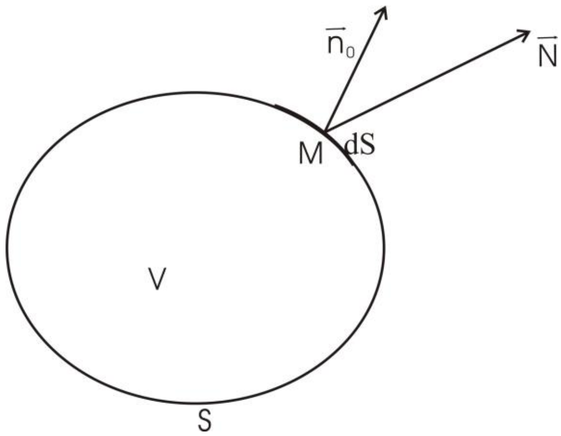
$$T_{11} = \left(\varepsilon E_k^2 + \frac{1}{\mu} B_x^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) = \varepsilon \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{1}{\mu} \left(B_x^2 - \frac{1}{2} B^2 \right),$$

a sve ove komponente možemo napisati u obliku matrice ovog tenzora

$$T = \begin{pmatrix} \varepsilon \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{1}{\mu} \left(B_x^2 - \frac{1}{2} B^2 \right) & \varepsilon E_x E_y + \frac{1}{\mu} B_x B_y & \varepsilon E_x E_z + \frac{1}{\mu} B_x B_z \\ \varepsilon E_y E_x + \frac{1}{\mu} B_y B_x & \varepsilon \left(E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{1}{\mu} \left(B_y^2 - \frac{1}{2} B^2 \right) & \varepsilon E_y E_z + \frac{1}{2} B_y B_z \\ \varepsilon E_z E_x + \frac{1}{2} B_z B_x & \varepsilon E_x E_y + \frac{1}{\mu} B_z B_y & \varepsilon \left(E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{1}{\mu} \left(B_z^2 - \frac{1}{2} B^2 \right) \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Ovde se može uvesti odgovarajući vektor napona $\mathbf{N}$ kao sila na jedinicu površine za datu orijentaciju normale ove površi (slika 1), tako da je $d\mathbf{F} = \mathbf{N}\, dS$. Poređenjem ova dva izraza za silu

$$d\mathbf{F} = \mathbf{N}\, dS = \mathcal{N} \cdot d\mathbf{S}$$



Slika 1: Vektor napona $\mathbf{N}$ kao sila na jedinicu površine

Proizlazi da je vektor napona pridružen jediničnom vektoru normale $\mathbf{n}_0$

$$\mathbf{N} = \mathcal{N} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dS} = \mathcal{N} \cdot \mathbf{n}_0 . \tag{17}$$

Označimo li komponente jediničnog vektora $\mathbf{n}_0$, tj. kosinuse pravca normale α_i $(i = 1, 2, 3)$, ovoj tenzorskoj relaciji odgovaraju skalarne

$$N_i = \sum_{k=1}^{3} T_{ik}\alpha_k \qquad (i = 1,\, 2,\, 3) \tag{18}$$

Prema tome komponente vektora napona elektromagnetnog polja u ma kojoj tački nekog elementa površi su homogene linearne funkcije kosinusa pravca normale tog elementa površi.

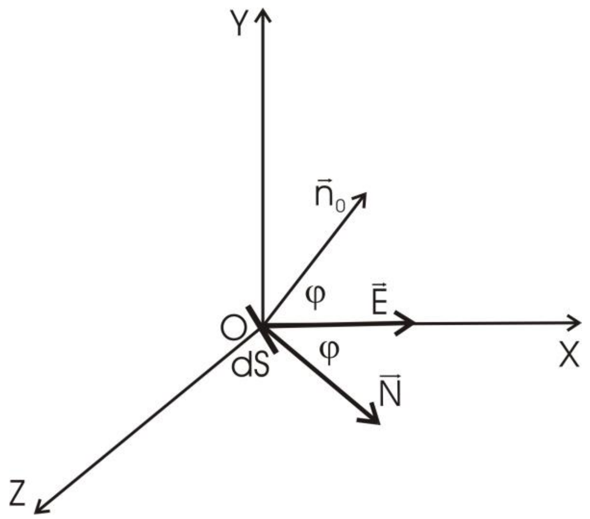
Pošto je oblast *V* koju smo razmatrali sasvim proizvoljna, možemo je uvek tako izabrati da prolazi kroz ma koju uočenu tačku polja *M* i da sadrži proizvoljno orijentisan element površi $d\mathbf{S}$. Odavde zaključujemo da se gornje relacije mogu primeniti na ma koju tačku polja za bilo koju orijentaciju elementa površi, te *Maksvelov tenzor napona karakteriše naponsko stanje elektromagnetnog polja u okolini posmatrane tačke, u kojoj se uzimaju vrednosti komponenata ovog tenzora*. Ako nam je poznato elektromagnetno polje, možemo naći i vrednosti svih komponenata (15) ovog tenzora, a tada gornje relacije (18) za svaki pravac normale $\mathbf{n}_0$ elementa površi u toj tački određuju odgovarajuće komponente napona elektromagnetnog polja. Pri tome je karakteristično da se *napon elektromagnetnog polja javlja u svim delovima prostora gde postoji elektromagnetno polje, nezavisno od toga da li se tu nalaze naelektrisanja ili ne,* ali tu treba imati u vidu da samo elektromagnetno polje zavisi i od naelektrisanja u posmatranoj oblasti.

Ovde treba učiniti još jednu važnu napomenu. Ako uporedimo Maksvelov tenzor napona (12) sa energijom elektromagnetnog polja[2] treba istaći da *veličina* $1/2(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$*, koja figuriše u tenzoru napona, ne mora uvek predstavljati gustinu energije elektromagnetnog polja.* Naime, tim izrazom je data gustina energije polja ako je $D_i = \sum_k \varepsilon_{ik} \, E_k$, $B_i = \sum_k \mu_{ik} \, H_k$, ali pod uslovom da komponente simetričnih tenzora ε_{ik} i μ_{ik} ne zavise od vremena, a mogu zavisiti na proizvoljan način od koordinata. Samo ako su ovi koeficijenti ε_{ik} i μ_{ik} konstantni, tj. ako je posmatrana sredina *homogena, bez disperzije i u stacionarnom stanju,* može se istovremeno formulisati i Maxwellov tenzor napona i gustina energije elektromagnetnog polja.

4. Pritisak elektrostatičkog polja

Da bismo bolje uvideli smisao Maksvelovog tenzora napona, posmatrajmo slučaj *elektrostatičkog polja* i uočimo oko neke tačke 0 orijentisan element površi $d\mathbf{S}$ (slika 2). Ako uočenu tačku uzmemo za koordinatni početak, pravac jačine električnog polja za X osu, a ravan određenu vektorima $\mathbf{E}$ i $\mathbf{n}_0$ za XOY ravan, imamo

$$E_x = E, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0$$



Slika 2: Uz izvođenje izraza za pritisak elektromagnetnog polja.

[2] $W = \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\,dV$

te se matrica Maksvelovog tenzora napona (21) svodi na

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\varepsilon E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon E^2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Označimo li sa ϕ ugao između vektora $\mathbf{E}$ i $\mathbf{n}_0$, kosinusi pravca biće

$$\alpha_1 = \cos\phi, \quad \alpha_2 = \sin\phi, \quad \alpha_3 = 0,$$

pa relacije (23) u ovom slučaju dobijaju oblik

$$\begin{aligned} N_x &= T_{11}\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \cos\phi, \\ N_y &= T_{22}\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon E^2 \sin\phi \\ N_z &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

a intenzitet napona biće

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2, \tag{26}$$

tj. brojno je jednaka gustini energije električnog polja.

Odavde vidimo da je *u elektrostatičkom polju napon* $\mathbf{N}$ *u istoj ravni u kojoj se nalaze vektori* $\mathbf{E}$ i $\mathbf{n}_0$, *a njegov pravac simetričan je sa pravcem vektora* $\mathbf{n}_0$ *u odnosu na pravac jačine električnog polja.* Stoga u ovom slučaju napon *povlači element površi u pravcu jačine električnog polja, ali ga istovremeno vuče u suprotnom smeru od spoljnje normale.*

5. Pojam impulsa elektromagnetnog polja

Ispitajmo sad poslednji član ponderomotornih sila elektromagnetnog polja (6), koji istovremeno potiče i od električnog i od magnetnog polja i koji je različit od nule samo u slučaju vremenski promenljivog polja

$$\mathbf{F}_3 \equiv \int_V \mathbf{f}_3 dV = -\frac{d}{dt}\int_V (\mathbf{D}\times\mathbf{B}) dV . \tag{27}$$

Da bismo videli smisao ovog člana, posmatrajmo *potpuno polje*, u kom slučaju su prema definiciji ovog pojma sve komponente jačine električnog i magnetnog polja na graničnoj površi ili jednake nuliii ili teže nuli bar kao $1/r^2$ i pretpostavimo da su ispunjeni uslovi pod kojima smo dobili Maksvelov tenzor napona. Stoga se sve komponente Maksvelovog tenzora napona (15) na graničnoj površi potpunog polja ponašaju kao $1/r^4$ ili još brže teže nuli, te površinski integral po ovoj površi u relaciji (11) otpada. Tada se desna strana ove relacije svodi samo na poslednji član

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}\, dV = -\frac{d}{dt}\int_V (\mathbf{D}\times B) d\mathrm{V},$$

ili konciznije

$$\mathbf{F} = -\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{g}\, dV, \tag{28}$$

gde smo stavili

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}\times\mathbf{B}. \tag{29}$$

Pošto je prema definiciji pojma sile ona jednaka izvodu impulsa po vremenu, izrazimo i ukupnu ponderomotornu silu $\mathbf{F}$ na taj način

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{meh}}{dt},$$

gde je $\mathbf{p}_{meh}$ odgovarajući mehanički impuls sistema. Tada gornju relaciju mođemo napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}_{meh} + \int_V \mathbf{g}\, dV\right) = 0, \tag{30}$$

odakle proizlazi

$$\mathbf{p}_{meh} + \int_V \mathbf{g}\, dV = const. \tag{31}$$

Odavde vidimo da u *potpunom polju* važi jedan zakon održanja, sličan zakonu održanja energije u elektrodinamici, u kome prvi član predstavlja mehanički impuls svih naelektrisanih čestica u toj oblasti. Imajući u vidu da smo postulirali da elektromagnetno polje sem energije ima i impuls i da ovde važi zakon održanja impulsa, gornja relacija može se interpretirati kao *zakon održanja impulsa u elektrodinamici*. Pri tome se sam drugi član koji karakteriše uticaj vremenski promenljivog elektromagnetnog polja na promenu impulsa sistema, može interpretirati kao *impuls elektromagnetnog polja* i označimo ga sa

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g}\, dV, \qquad \mathbf{g} = \mathbf{D}\times\mathbf{B} \tag{32}$$

gde je $\mathbf{g}$ tzv. *gustina impulsa elektromagnetnog polja*, tj. impuls polja po jedinici zapremine. Ako je posmatrana sredina *homogena*, *izotropna i bez disperzije*, kad važe materijalne jednačine $\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$ i $\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$, gustina impulsa polja dobija oblik

$$\mathbf{g} = \varepsilon\,\mu\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \varepsilon\,\mu\,\mathbf{P} \tag{33}$$

gde je $\mathbf{P}$ Pointingov vektor.

Prema tome, elektromagnetno polje sem energije poseduje i impuls, tako da u potpunom polju ukupni impuls sistema, tj. zbir mehaničkog impulsa i impulsa elektromagnetnog polja ostaje stalan u toku vremena. Pri tome je sam impuls elektromagnetnog polja određen gornjim zapreminskim integralom, što znači da svakom elementu zapremine dV pripada impuls $\mathbf{g}\,dV$. Odavde zaključujemo da je *impuls elektromagnetnog polja, kao i energija polja, lokalizovan u prostoru sa gustinom* $\mathbf{g}=\mathbf{D}\times\mathbf{B}$, odnosno $\mathbf{g}=\varepsilon\,\mu\,\mathbf{P}$ *za izotropne sredine bez disperzije.* U ovom poslednjem slučaju, a imajući u vidu i fizički smisao Pointingovog vektora, možemo reći da se *svakoj tački polja u kojoj postoji strujanje energije može pripisati određena gustina impulsa elektromagnetnog polja, čija se promena u toku vremena ispoljava u vidu odgovarajućih zapreminskih ponderomotornih sila.*

Ovde učinimo još jednu napomenu u vezi važenja zakona akcije i reakcije, za koji smo videli da u elektrodinamici uvek ne važi, kao na pr. za Amperov zakon. Iz gornjeg smo videli da u potpunom polju samo zbir (31) ostaje stalan u toku vremena, međutim može se desiti da to važi i za svaki od ovih sabiraka pojedinačno, tj. da bude $\mathbf{p}_{meh}=const$ i $\int \mathbf{g}\,dV=const$. S druge strane, iz mehanike znamo da je zakon akcije i reakcije ustvari ekvivalentan važenju zakona održanja impulsa za svaki par čestica, a u tom slučaju biće i $\mathbf{p}_{meh}=const$. Odavde možemo zaključiiti da *ako važi zakon akcije i reakcije za određeni tip sila u elektrodinamici, ukupni impuls čestica sistema kao i impuls potpunog elektromagnetnog polja pojedinačno biće u toku vremena, tj.* $\int \mathbf{g}\,dV=const$ predstavljaće potreban, ali ne uvek i dovoljan uslov važenja zakona akcije i reakcije u elektrodinamici.

6. Opšti zakon promene impulsa

Posmatrajmo sad opšti slučaj, kad posmatrana oblast ne predstavlja potpuno polje. Ako su ispunjeni navedeni uslovi, ponderomotorna sila je data izrazom (11), gde možemo uvesti gustinu impulsa polja (29)

$$\mathbf{F}=\int_V \mathbf{f}\,dV=\oint_S \mathcal{N}\cdot d\mathbf{S}-\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{g}\,dV\,. \tag{34}$$

Ova relacija može se napisati i na drugi način, izražavajući ponderomotornu silu $\mathbf{F}$ kao izvod impulsa po vremenu

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}_{meh}+\int_V \mathbf{g}\,dV\right)=\oint_S \mathcal{N}\cdot d\mathbf{S} \tag{35}$$

što pokazuje analogiju sa odgovarajućom relacijom koja izražava zakon održanja energije u elektrodinamici, a integral na desnoj strani možemo interpretirati kao *fluks impulsa* kroz graničnu površ.

Odavde vidimo da ako je posmatrana sredina *homogena i bez disperzije* i ako su materijalne jednačine $D_i = \sum_k \varepsilon_{ik} E_k$ i $B_i = \sum_k \mu_{ik} H_k$ *sa simetričnim i konstantnim koeficijentima, ukupna ponderomotorna sila kojom elektromagnetno polje dejstvuje na neki sistem slobodnih naelektrisanja u izvesnoj oblasti V može se rastaviti na dva dela, od kojih se prvi ispoljava u vidu naponskih sila na graničnu površ, a drugi u vidu promene impulsa elektromagnetnog polja u toku vremena, koji dejstvuje nasuprot prvom.* Ukoliko u posmatranoj oblasti nema slobodnih naelektrisanja, kao na pr. u slučaju elektromagnetnog polja u vakuumu, prema (7) biće $\mathbf{f} = 0$, pa će ukupna ponderomotorna sila $\mathbf{F}$ biti jednaka nuli, te (34) daje

$$\oint_S \mathcal{N} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g}\, dV. \quad (\mathbf{F} = 0) \tag{36}$$

Prema tome, čak i u oblasti gde nema slobodnih naelektrisanja, kad je ukupna ponderomotorna sila jednaka nuli, postoje obe komponente ove sile: naponska sila na graničnu površ i sila koja potiče od promene impulsa elektromagnetnog polja, koje se tada međusobno uravnotežavaju. Drugim rečima, u ovom slučaju sila na graničnu površ može se prikazati u vidu izvoda po vremenu jedne veličine, koja predstavlja impulselektromagnetnog polja.

Da bismo našli odgovarajuću jednačinu u diferencijalnom obliku, pođimo od relacije (34) i transformišimo integrale na desnoj strani u zapreminske. Ako prvi integral transformišemo u zapreminski prema Gaussovoj teoremi za tenzore, a u drugom izvršimo izmenu redosleda operacija, imaćemo

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}\; dV = \int_V div\, \mathcal{N}^* dV - \int_V \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} dV\,, \tag{37}$$

gde je $\mathcal{N}^*$ konjugovan Maxwellov tenzor napona. Pošto ova jednakost mora da važi za *ma kakvu zapreminu V*, odgovarajući integrandi moraju biti međusobno jednaki

$$\mathbf{f} = div\, \mathcal{N}^* - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}\,. \tag{38}$$

Imajući u vidu da je divergencija tenzora jednaka $div\, \tau = \sum_i \mathbf{e}_i\, div \mathbf{T}_i$, gde su $\mathbf{T}_i$ vektori komponente ovog tenzora, možemo dobiti i odgovarajuće skalarne jednačine u obliku

$$f_i = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{39}$$

jer su vektori-komponente $\mathbf{T}_i$ u ovom slučaju odgovarajuće kolone (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3}) matrice tenzora $\mathcal{N}^*$. Ove relacije daju *zavisnost između gustine ponderomotornih sila, Maxwellovog tenzora napona i gustine impulsa elektromagnetnog polja.*

Dodatak A

1. NEKE POMOĆNE FORMULE

Navedimo ovde neke relacije iz teorije tenzora kao operatora, koje će nam biti potrebne u daljem izlaganju, pri čemu ćemo pretpostaviti da su čitaocu poznate osnove ove teorije (v. na pr. udžbenik Dj. Mušicki i B. Milić: *Matematičke osnove teorijske fizike,* Glava 4).

a) Kao što je poznato, svaki tenzor može se prikazati kao zbir nezavisnih dijada, pri čemu se dijadski proizvod dva vektora $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}$ može definisati kao operator relacijama

$$\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}),\quad \mathbf{C}\cdot\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}=(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\,\mathbf{B}. \tag{1}$$

Divergencija tako definisanog dijadskog proizvoda može se dobiti primenom Hamiltonovog operatora

$$\nabla\cdot\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}=\nabla\cdot\{\mathbf{A}^*,\mathbf{B}\}+\nabla\cdot\{\mathbf{A},\mathbf{B}^*\},$$

gde smo zvezdicom označili vektor na koji treba primeniti operator ∇. Odavde neposredno proizilazi, na osnovu gornje definicije dijadskog proizvoda

$$\nabla\cdot\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}=(\nabla\cdot\mathbf{A}^*)\mathbf{B}+(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}^*,$$

a otuda

$$\mathbf{B}\,div\,\mathbf{A}=\nabla\cdot\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}. \tag{2}$$

b) Poslednji član ove relacije može se povezati i sa vektorskim proizvodom $\mathbf{A}\times rot\,\mathbf{B}$, koji se takođe može razviti primenom Hamiltonovog operatora

$$\mathbf{A}\times rot\,\mathbf{B}=\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})=\nabla\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*)-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}^*,$$

a s druge strane imamo

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\nabla(\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{B})+\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*)$$

Pretpostavimo li sad da su vektori $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ vezani tenzorskom relacijom

$$B_i=\sum_k\alpha_{ik}A_k\Leftrightarrow\mathbf{B}=\alpha\cdot\mathbf{A} \tag{3}$$

pri čemu koeficijenti α_{ik} ne zavise od koordinata, može se uspostaviti izvesna veza i između gornjih skalarnih proizvoda ovih vektora. Naime

$$\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}^*\cdot\alpha\cdot\mathbf{A}=\alpha\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^*=\mathbf{A}\cdot\tilde{\alpha}\cdot\mathbf{A}^*,$$

gde je $\tilde{\alpha}$ odgovarajući konjugovani tenzor (ovde samo konjugovani tenzor označili sa umesto standardnog α^* radi izbegavanja nesporazuma), a na sličan način može se razviti i izraz $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*$

$$\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot\tilde{\alpha}\cdot\mathbf{A}^*,\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*=\mathbf{A}\cdot\alpha\cdot\mathbf{A}^*. \tag{4}$$

Ako još pretpostavimo da je tenzor α simetričan, tj. $\tilde{\alpha}=\alpha$, poslednja dva izraza biće međusobno jednaka, pa ćemo u tom slučaju imati

$$\nabla\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)=2\nabla\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*\right),$$

a relacija za $\mathbf{A}\times rot\ \mathbf{B}$ eliminacijom $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*$ dobija vid

$$\mathbf{A}\times rot\ \mathbf{B}=\frac{1}{2}\nabla\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)-\left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}.$$

Prema tome, došli smo do zaključka

$$\begin{gathered}ako\ \ je\ \ \mathbf{B}=\alpha\cdot\mathbf{A}\quad \tilde{\alpha}=\alpha:\\ \left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}+\mathbf{A}\times rot\ \mathbf{B}=\nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)\end{gathered} \tag{5}$$

medjutim u opštem slučaju ova relacija ne važi, dok se za $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ svodi na poznatu relaciju iz vektorske analize.